令和４年度入学試験問題（前期日程）

数　　　　学

（中等教育教員養成課程　数学専攻）

注意事項

1. **試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**
2. 解答紙は４枚（４の１，４の２，４の３，４の４）あります。
3. 試験開始後，各解答紙の上部の２箇所に受験番号を記入しなさい。また，計算紙にも受験番号を記入しなさい。
4. 解答はすべて解答紙の所定の解答欄に記入しなさい。**解答紙の裏面に記入した解答は採点の対象になりませんので注意してください。**
5. 定規，コンパスは使用できません。

〔１〕　次の問いに答えよ。

（問１）　z，w を複素数とする。$|z|=1$ または $|w|=1$ のとき

$$|z\overline{w}+1|=|z+w|$$

が成り立つことを示せ。ただし，$\overline{w}$ は w の共役な複素数を表す。

（問２）　a，r を実数とし，$a>0$，$r\neq 0$ とする。$\{b_n\}$ を初項 2，公比 r の等比数列とするとき，次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。

$$a_1=a,\quad a_{n+1}={a_n}^r\,e^{b_n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

（問３）　θ を $\sin\theta\neq 0$ である実数とし，n を自然数とする。n に関する数学的帰納法によって次の等式を示せ。

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$$

〔２〕　n を 6 以下の自然数とする。1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，出た目の最大値が n となる確率を P_n とし，出た目の最小値が n となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

（問１）　P_1，p_1 をそれぞれ求めよ。

（問２）　P_n，p_n をそれぞれ n を用いて表せ。

（問３）　$P_n\leqq p_n$ を満たす n をすべて求めよ。

〔３〕　複素数 z の実部と虚部がともに正であり，z は

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = 1$$

を満たしている。次の問いに答えよ。

（問１）　z を極形式で表せ。ただし，偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

（問２）　$z^{100} + \dfrac{1}{z^{100}}$ を求めよ。

（問３）　複素数平面上の３点 z，z^2，$z^{100} + \dfrac{1}{z^{100}}$ を頂点とする三角形の面積を求めよ。

〔４〕　次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

（問１）　k が自然数のとき，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{k+1} \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \frac{1}{k}$$

（問２）　n が２以上の自然数のとき，次の不等式を示せ。

$$\log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq 1 + \log n$$

（問３）　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ を求めよ。